



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2018



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX -a

### Problema 1.

Suma a trei numere este 100. Știind că primul număr este 40% din al doilea iar al treilea număr este 150% din primul număr, determinați cele trei numere.

### Problema 2.

a) Fie  $D$  mijlocul laturii  $[BC]$  a triunghiului  $ABC$ . Să se demonstreze că  $\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ .

b) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , unde  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

### Problema 3.

Pe dreapta  $(d)$  se iau în ordine punctele  $M, M_0, M_1, \dots, M_n$ , astfel încât  $MM_0 = 1\text{ cm}$ ,  $M_0M_1 = 3\text{ cm}$ ,  $M_1M_2 = 3^2\text{ cm}$  etc. (fiecare segment este de trei ori mai mare decât segmentul dinaintea lui). Să se determine lungimea segmentului  $MM_{2018}$ .

### Problema 4.

Fie  $a_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Demonstrați că  $a_8 = \frac{2}{3}$ .

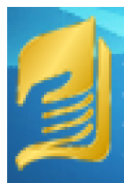
b) Demonstrați că  $a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

c) Determinați  $n \leq 15$  astfel încât  $a_n \in \mathbb{Q}$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2018



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a X-a

### Problema 1.

- a) Verificați egalitatea  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ,  $(\forall) z \in \mathbb{C}$ .  
b) Determinați  $k > 0$  astfel încât  $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = k(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ ,  $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .  
c) Dacă  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 1$  și  $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ , să se determine  $|z_1 - z_2|$ .

### Problema 2.

Pentru  $x > 1$ , notăm cu  $S_n(x) = x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- a) Calculați  $(1 - x) \cdot S_n(x)$ .  
b) Deduceți  $x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-n} = \frac{x^n - 1}{x^n(x - 1)}$ ,  $(\forall) x > 1$ .  
c) Folosind, eventual, punctul anterior, să se demonstreze că  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{3} < 3$ ,  $(\forall) n \geq 1$ .

### Problema 3.

Avem la dispoziție un număr nelimitat de jetoane pe care sunt scrise numerele 5, 7 sau 11. Un număr  $n \in \mathbb{N}^*$  se numește „norocos” dacă găsim un număr de jetoane astfel încât suma numerelor scrise pe ele să fie egal cu  $n$ .

- a) Demonstrați că numărul 13 nu este „norocos”.  
b) Demonstrați că numerele: 14, 15, 16 și 18 sunt „norocoase”.  
c) Demonstrați că orice număr natural  $n \geq 14$  este „norocos”.

### Problema 4.

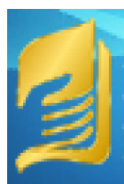
La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevul sosit pe locul  $k$  ( $k = \overline{1,9}$ ) i se acordă  $\frac{10}{k}$  puncte. Juriul concursului a constatat următoarele condiții îndeplinite simultan:

- Oricare doi elevi nu au sosit în același timp.
  - Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite.
  - Elevii liceului C au sosit unul după altul.
  - Fiecare elev de la liceul B avea chiar în fața sa un elev de la liceul A.
- Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2018



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI -a

## Problema 1.

a) Calculați  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 9}{x^2 + 5x + 3} \right)^x$ .

b) Determinați  $m, n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x + 3} - \sqrt{3x^2 + x + 5} - mx - n) = 0$ .

## Problema 2.

Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

a) Calculați  $A^2$  și  $\det(A)$ .

b) Dacă  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  și  $\det(X) = 0$ , demonstrați că  $X^2 = (a + d) \cdot X$ .

c) Rezolvați ecuația  $X^{2018} = A$ .

## Problema 3.

Să se rezolve ecuația  $\Delta(x) = 0$ , unde:  $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 & 16 \\ x^2 + 1 & x^4 + 1 & 17 \\ x^2 + x & x^4 + x^2 & 20 \end{vmatrix}$ .

(Se vor folosi proprietățile determinantilor)

## Problema 4.

Doi prieteni, Cristian și Andrei, măsoară fiecare distanța de acasă până la școală. Distanța măsurată de Cristian este egală cu  $x$  km, iar cea măsurată de Andrei este egală cu  $y$  km. Știind că există  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ , nu neapărat distincte

astfel încât să fie verificat sistemul: 
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ ax + y = 5 \\ cx + 3y = b + 6 \end{cases}, \text{ determinați } a, b, c \text{ și distanțele } x \text{ și } y.$$

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

## CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2018



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

### Problema 1.

Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1; & x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b; & x > 1 \end{cases}$  să fie o primitivă pentru o funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x)$ . Determinați apoi funcția  $f$ .

### Problema 2.

Calculați  $I(x) = \int \frac{x \cdot e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

### Problema 3.

Considerăm mulțimea  $G = \left\{ A(x) \in M_3(\mathbb{R}), A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2x^2 + 3x & 2x & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

- Demonstrați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ .
- Demonstrați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.
- Demonstrați că grupul  $(\mathbb{R}, +)$  este izomorf cu grupul  $(G, \cdot)$ .
- Calculați  $(A(x))^{2018}$ .

### Problema 4.

Fie  $M$  o mulțime nevidă și „ $*$ ” o lege de compoziție pe  $M$ . Spunem că elementul  $d \in M$  este „*destroyer*” pentru operația „ $*$ ” dacă  $d * x = x * d = d$ ,  $(\forall) x \in M$ . Pentru  $a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  fixate, definim pe  $\mathbb{R}$  operația „ $*$ ” prin  $x * y = bxy + abx + aby + a^2b - a$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ .

- Demonstrați că operația „ $*$ ” este asociativă și admite element „*destroyer*”.
- Demonstrați că  $E = (-2018a) * (-2017a) * \dots * (-a) * 0 * a * \dots * (2017a) * (2018a) < 0$ .

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.